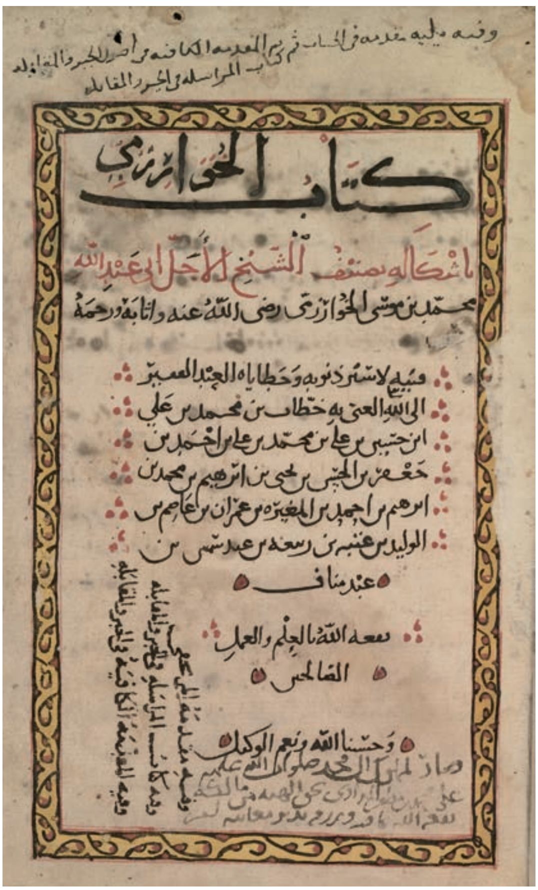
"København er en stor by", er de begge grammatisk set stort set identiske, men logisk set er de helt forskellige. Den ene omhandler byen København, den anden ordet "København". Hvis vi ved, at den første sætning er korrekt, kan vi slutte følgende: "Danmarks hovedstad er en stor by", og "'København' er navnet på en stor by". Men vi kan ikke slutte, at "'En stor by' er navnet på Danmarks hovedstad". Middelalderens logikere interesserede sig for sådanne intrikate samspil mellem sproget og logikken. De havde et fælles sprog at arbejde med, latinen, og de havde en fælles motivation for at beskæftige sig med, hvad der af mange måske kunne opfattes som spidsfindigheder, nemlig den lange række af intrikate fortolkningsproblemer, som kristendommen rejste.

Det arabiske talsystem

En af de ting, vi i allerhøjeste grad kan takke middelalderens mennesker for, er muligheden for at foretage simple beregninger. Det var i middelalderen, at arabertallene blev indført. Det afgørende var ikke selve taltegnenes udseende, altså om man skrev "fem" som 5 eller som V. Det afgørende var først og fremmest nullet, og det dertilhørende positionssystem. I tallet 555 betyder "5" et sted "fem hundrede", et andet "halvtreds", og et tredje "fem", underforstået "fem enere". 555 skal altså læses "$5 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 5 \cdot 1$", og pladserne regnes fra højre mod venstre og baserer sig på potenser af 10 startende med 0. Så 555 kan også skrives "$5 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$". Taltegnet 0 benyttes så til at betegne, at der ikke er nogen hundreder, tiere eller enere eller nogen anden potens af 10. Nullet og positionssystemet kan i princippet bruges med alle tal som grundtal – dvs. man kan også bruge potenser af 2, 8, 20 eller hvilke som helst andre tal. Det blev dog 10-tals-systemet, der blev dominerende, selvom reminiscenser af både 12 – og 20-tals-systemer findes den dag i dag.

Tal kunne nu repræsenteres på en simpel måde med et begrænset antal grundlæggende taltegn, ciffer-tegn, nemlig de ti taltegn fra 0 til 9. Med disse kunne der skrives uendeligt mange tal, idet antallet af positioner fra højre mod venstre var ubegrænset. Det var noget nyt, en form for tallenes alfabetisering.

Men endnu vigtigere var det, at denne repræsentation af tal muliggjorde udvikling af skriftlige regnemetoder baseret på simple manipulationer med taltegnene på papir, det vi i dag tager som en ren selvfølge og lærer i de første skoleår. Med simple regler kan man lægge sammen, gange og dividere. Det kræver kun, at man memorerer nogle få talforhold, først og fremmest den lille tabel. Men i princippet kan man altid "regne" sig frem ved at tælle på fingrene. Man må så også lære noget med menter, der i systemet betyder, at man flytter sig fra en position til en anden. Sådanne operationer havde tidligere været komplicerede og ofte krævet brug af andet end selve taltegnene, f.eks. en abacus, en art kugleramme. I flere hundrede år diskuterede man, hvad der var bedst: regning, som vi kender den, eller brug af kugleramme. I det engelske udtryk "over the counter" findes en sproglig rest af, at handel foregik hen over en "counter", der netop var en kugleramme. Men med de nye tal kunne man nemt foretage simple beregninger. Det fik enorm betydning for mange mennesker, der nu på en helt anden måde kunne begynde at måle, veje og regne. Købmænd og bygmestre kunne regne, så længe de ting, de arbejdede med, kunne repræsenteres ved tal. Vægt eller antal, længde og højde, alt sammen kunne gøres til tal. Her ligger starten på den form for regning, vi kender som skole-regning. Hvis 50 kg koster 200 kroner, hvad koster så 1 kg?

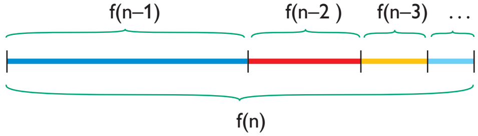


Selvom nullet har været brugt i flere civilisationer, blev det først for alvor introduceret i den europæiske idehistorie via den persiske matematiker, geograf og astronom Muhammed ibn-Musa al-Khwarizmi (9. årh. e.v.t.). I bogen *Al-Jabr wa-al-Muqabilah*, som denne side kommer fra, udvikler han analytiske løsninger til kvadratiske ligninger. Ordet *algebra* er udledt fra *al-jabr*, som er en af de to operationer, han brugte til at løse kvadratiske ligninger, og som går ud på at fjerne negative størrelser på den ene side og lægge dem til på den anden – det vil i moderne notation f.eks. svare til at omskrive $x^2+4 = 3x-7x^2-1$ til $8x^2+5 = 3x$. Bemærk al-Khwarizmis brug af de tre røde prikker, som i ergo-symbolet · Bodleian Library, Oxford.

Og hvad koster 200 kg osv.? Langsomt blev flere og flere områder underlagt tal og måling, og senere, i 1600-tallet, blev sågar den ellers geometrisk baserede naturvidenskab gjort til tal.

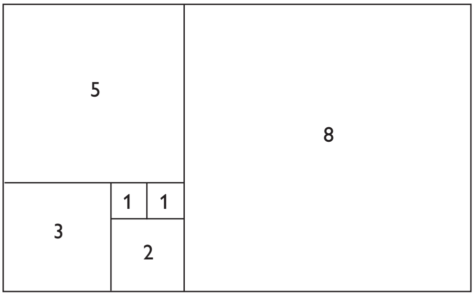
Det tidligst kendte nedskrevne nul stammer fra 683 og findes i Cambodja. I 718 findes der en kinesisk tekst med nuller, skrevet af indiske forskere, der var ansat hos den kinesiske kejser. Omkring 660 kendes fra Syrien omtaler af positionssystemet, men uden nullet. I Indien kendes der indskrifter med nullet fra 870, og helt sikkert er det, at indere, kinesere og arabere på den tid brugte systemet. Det var imidlertid araberne, der udviklede systemet til det, vi kender i dag, idet de bl.a. indførte decimalbrøkerne, så man f.eks. kunne skrive ½ som 0,5. Den arabiske matematiker Muhammed ibn-Musa al-Khwarizmi (9. årh. e.v.t.) skriver i begyndelsen af 800-tallet en lærebog i aritmetik, dvs. talbaseret matematik, som senere bliver oversat til latin og danner basis for en væsentlig del af middelalderens regnekunst. Det er efter ham, vi har ordet “algoritme”, der er en vestlig forvanskning af hans navn, al-Khwarizmi. I 952 skriver en anden arabisk matematiker i Damaskus, Abu Hasan Al-Uqlidisi (10. årh. e.v.t.), en lærebog om regnekunst, der eksplicit fremlægger algoritmer, dvs. regnemetoder, der alene manipulerer med symboler på papir – og altså undgår brug af sten, streger i sandet eller andre mekaniske hjælpemidler. Det var et skelsættende fremskridt, og først med computernes indtog ca. tusind år senere kan man tale om en lignende fornyelse af regnehjælpemidlerne.

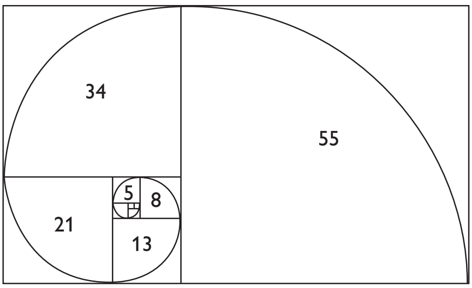
En af de helt afgørende personer, der introducerede de nye tal og de nye regnemuligheder i Europa, var italieneren Leonardo fra Pisa (ca. 1170-1250), kendt som Fibonacci. Han skrev i 1202 en bog om regning, *Liber abbaci*, hvori han gennemgår alle de nye ting, herunder også en masse praktiske problemer. Leonardo var søn af en købmand, der handlede med araberne, og han opholdt sig i perioder i Nordafrika, hvor han givetvis har lært de nye tal og metoder at kende.



f(n) er til f(n-1), som f(n-1) er til f(n-2), hvis n ≫ 1

Fibonacci-tallene er tæt knyttet til det gyldne snit, fordi det gyldne snit, som forklaret i forrige kapitel (s. 43), kan beskrives som et forhold, hvor summen af to linjesegmenter a og b har samme størrelsesforhold til a, som a har til b. I tilfældet af Fibonaccis talrække konvergerer forholdet mellem to efter hinanden følgende Fibonacci-tal f(n) og f(n-1) mod det gyldne snit for voksende n. F.eks. vil forholdet for det fjerde Fibonacci-tal (n=4, f(n)=3) være 3/2=1,5 mens det for det tiende Fibonacci-tal (n=10, f(n)=55) vil være 55/34 ~ 1,61765, hvilket ligger tættere på det gyldne snit (som er på ~ 1,6180339887).





Ud fra Fibonacci-tallene kan man danne en spiral, hvor hvert nyt kvadrat er additionen af de to foregående længder. I naturen findes der utallige eksempler på Fibonacci-lignende former.

Det mest berømte problem, Fibonacci behandler, er spørgsmålet om hvor mange kaniner, der på et år kan avles, hvis udgangspunktet er ét par. Vi antager, at to kaniner kan avle ét nyt par på en måned, og at kaniner kan avle igen efter en måned. Svaret bliver på den basis 377 par på et år. Det følger af denne serie af tal: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, hvor hvert tal er summen af de to foregående (startende med 0 og 1). Det er den såkaldte Fibonacci-serie, der har en række meget interessante – og givetvis af Leonardo ikke erkendte – egenskaber. Samtidig med Fibonacci var en anden matematiker i gang i Paris, Jordanus de Nemore (13. årh. e.v.t.). (Det siges, at der er tale om en kvinde.) Han/hun bidrog også afgørende til etableringen af en vestlig matematik, der var på højde med den arabiske.

Overtro som katalysator for indsigt

På basis af udviklingen inden for matematikken kunne en række forskere fra midten af 1200-tallet udvikle nye resultater og teknikker. Det førte til mange forbedringer af den fra antikken overtagne videnskab. Man studerede bevægelse og fandt flere resultater, som vi normalt tilskriver den senere såkaldte "videnskabelige revolution". En forsker som Nicolas af Oresme (ca. 1320-82) beskrev et legemes frie fald på en ikke-aristotelisk måde. Man ind-